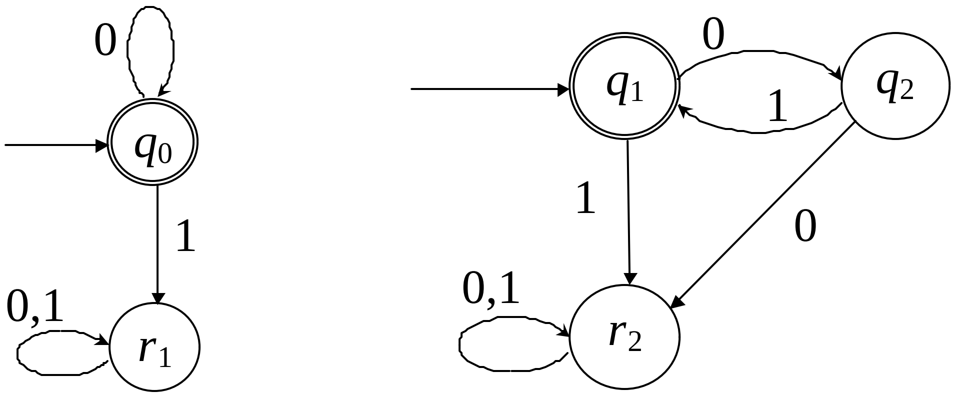
MODUL 5:
Nondeterministic Finite Automata dengan Transisi-L (NFA-L)

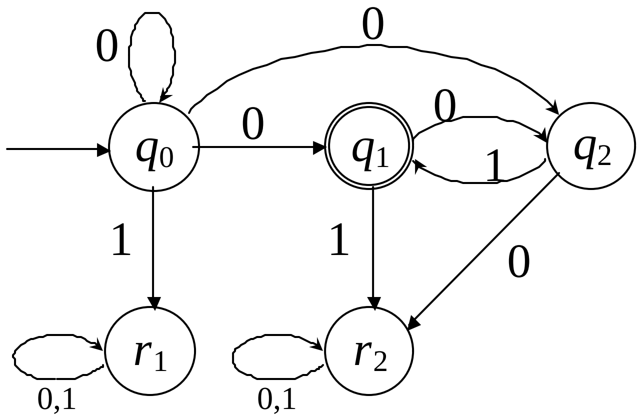
Dengan konsep nondeterministisme dari suatu ekspresi regular suatu NFA yang dapat menerima bahasa ybs dapat langsung dilakukan.

Namun, masih terdapat kasus-kasus dimana hal ini tidak dapat dilakukan secara sederhana.

Contoh: $0^*(01)^*$ dapat dipandang sebagai sebagai konkatenasi dua ekspresi regular 0^* dan $(01)^*$. Bahasa-bahasa dari ekspresi-ekspresi tsb diterima oleh FA-FA sebagai berikut.



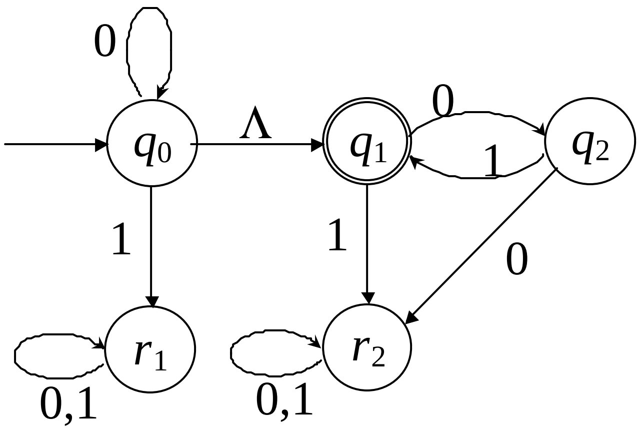
Bahasa dari ekspresi regular $0^*(01)^*$ dapat dikenal oleh NFA yang dibentuk dari kedua FA di atas sebagai berikut ini.



Transisi dari q_0 ke q_1 diperlukan untuk menerima 0^* sementara transisi dari q_0 ke q_2 diperlukan untuk menerima $(01)^*$.

- Aturan penambahan transisi yang melengkapi "konkatenasi" kedua FA semula tidaklah bisa dengan sederhama dijelaskan.
- Dalam konkatenasi lain bahkan bisa lebih rumit apabila status menerima FA pertama berjumlah cukup banyak.

Seandainya NFA bisa memiliki transisi tanpa simbol masukan (kita sebut **transisi-L**) maka kontatenasi tersebut dapat dilakukan hanya seperti pada diagram berikut ini.



- Diagram ini bukanlah NFA, tetapi NFA-Λ.
- NFA-Λ ini dapat mengenali bahasa yang sama dengan bahasa yang dikenali oleh NFA sebelumnya
- struktur yang lebih sederhana dan lebih mencerminkan konkatenasi kedua FA asal melalui transisi Λ.
- Juga operasi Kleene-* dan gabungan.

Definisi: suatu NFA dengan transisi-Λ (disingkat NFA-Λ) merupakan 5-tuple (Q, Σ, q_0, A, $\boldsymbol{d}$) dimana Q dan Σ merupakan himpunan-himpunana terbatas, $q_o \in Q$ dan $A \subseteq Q$, serta $\boldsymbol{d}$ terdefinisi sebagai pemetaan sbb.

$\boldsymbol{d}: Q \times (\Sigma \cup \Lambda) \rightarrow 2^Q$

Perhatikan: domain dari $\boldsymbol{d}$ adalah Σ dan Λ.

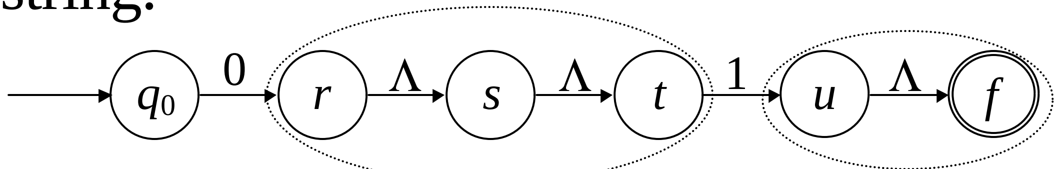
NFA $\boldsymbol{d}: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

FA $\boldsymbol{d}: Q \times \Sigma \rightarrow Q$

Fungsi perluasan transisi d^*

Karena adanya transisi-Λ, jumlah transisi yang diaplikasikan pada d^* bisa lebih besar dari panjang string.

Contoh: string 01 akan dikenali sebagai 0ΛΛ1Λ seolah sejumlah "simbol palsu Λ" disisipkan pada string.



L-closure dari Himpunan Status S atau L(S)

Untuk memahami definisi d^* akan diperkenalkan konsep Λ-closure (lingkupan-Λ) sbb.

Λ(S) adalah seluruh status dalam S tersebut beserta status-status lain yang dapat tercapai oleh masing-masing status dalam S melalui satu atau beberapa transisi Λ (Jadi $S \subseteq \Lambda(S)$).

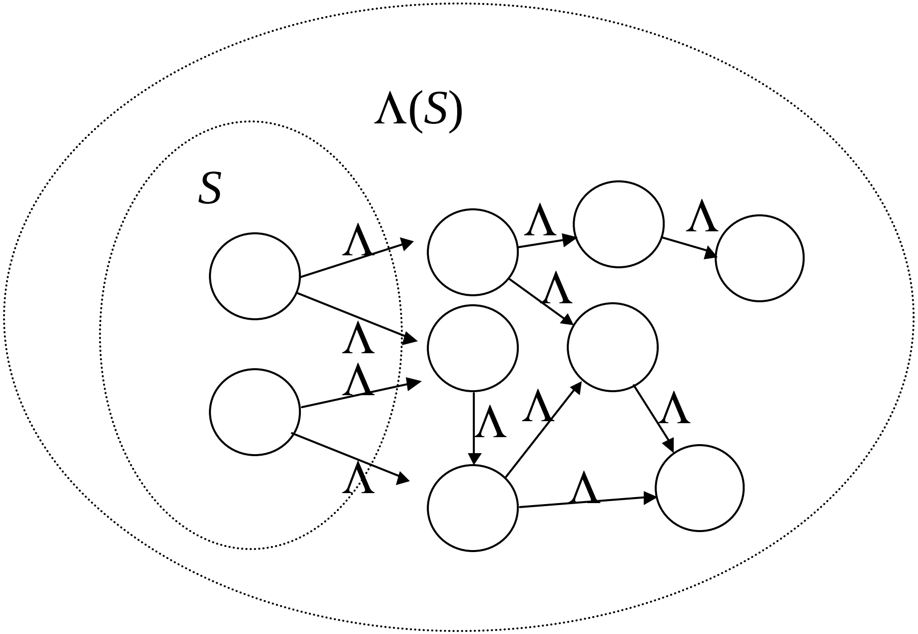
Definisi L(S)

Pada suatu NFA- Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, d)$ dan $S \subseteq Q$, suatu fungsi $\Lambda(S)$ didefinisikan sebagai berikut:

- Setiap anggota S merupakan anggota $\Lambda(S)$.
- Untuk setiap $q \in \Lambda(S)$, setiap anggota $d(q, \Lambda)$ adalah anggota $\Lambda(S)$.
- Tidak ada anggota lain dari Q yang anggota $\Lambda(S)$ kecuali berdasar kedua pernyataan di atas.

Algoritma Pencarian L(S)

- Inisialisasi $T_1 = S$.
- Lakukan iterasi dari i =1, 2, 3,… , dan pada iterasi ke-i:
  - $T_{i+1} = T_i$
  - Untuk setiap $q \in T_i$, gabungkan $d(q, \Lambda)$ ke dalam T_{i+1}.
- Iterasi berhenti saat $T_{i+1} = T_i$ (artinya tidak ada status baru yang bergabung dalam T).


Λ(S)
S
Λ
Λ
Λ
Λ
Λ
Λ
Λ
Λ
Λ
Λ
Λ

Definisi d^* untuk NFA-L

Pada setiap NFA-Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, d)$ fungsi d^* :
$Q \times (\Sigma^* \cup \Lambda) \to 2^Q$ didefinisikan sbb.

- Untuk setiap $q \in Q$ maka $d^*(q, \Lambda) = \Lambda(\{q\})$.
- Dan untuk setiap $y \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, dan $q \in Q$

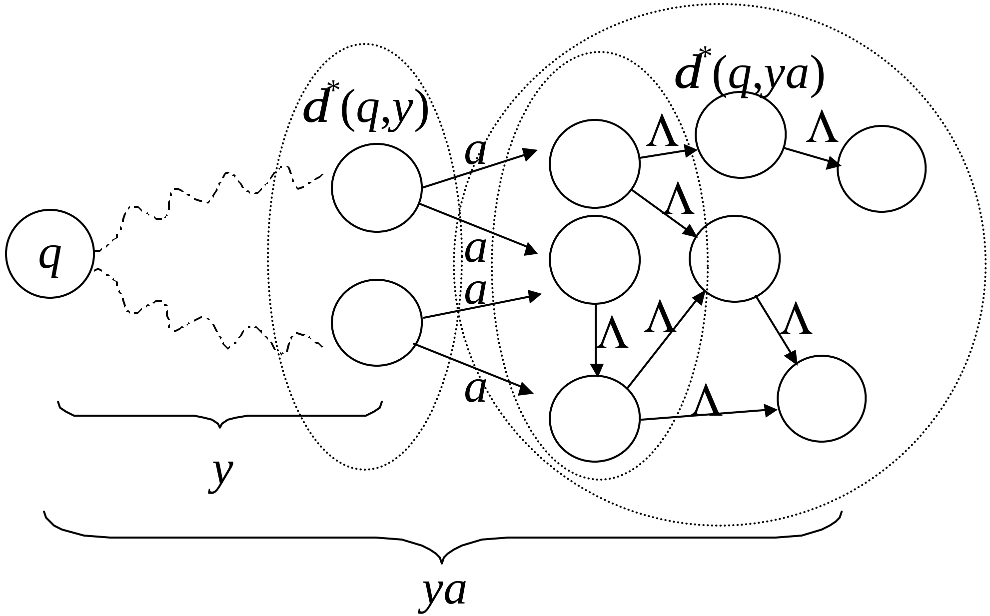
$$d^*(q, ya) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in d^*(q,y)} d(p, a) \right)$$

Algoritma untuk mendapatkan $\delta^*(q, ya)$:

- menentukan $\delta^*(q, y)$
- mendapatkan himpunan gabungan dari setiap $\delta(p, a)$ untuk setiap $p \in \delta^*(q, y)$
- menentukan $\Lambda(\ )$ dari himpunan gabungan tersebut.

Selanjutnya $\delta^*(q, y)$ dicari dengan cara yang sama dengan di atas dimana $y = xb$.

Apabila $y = \Lambda$, $\delta^*(q, y) = \delta^*(q, \Lambda) = \Lambda(\{q\})$.

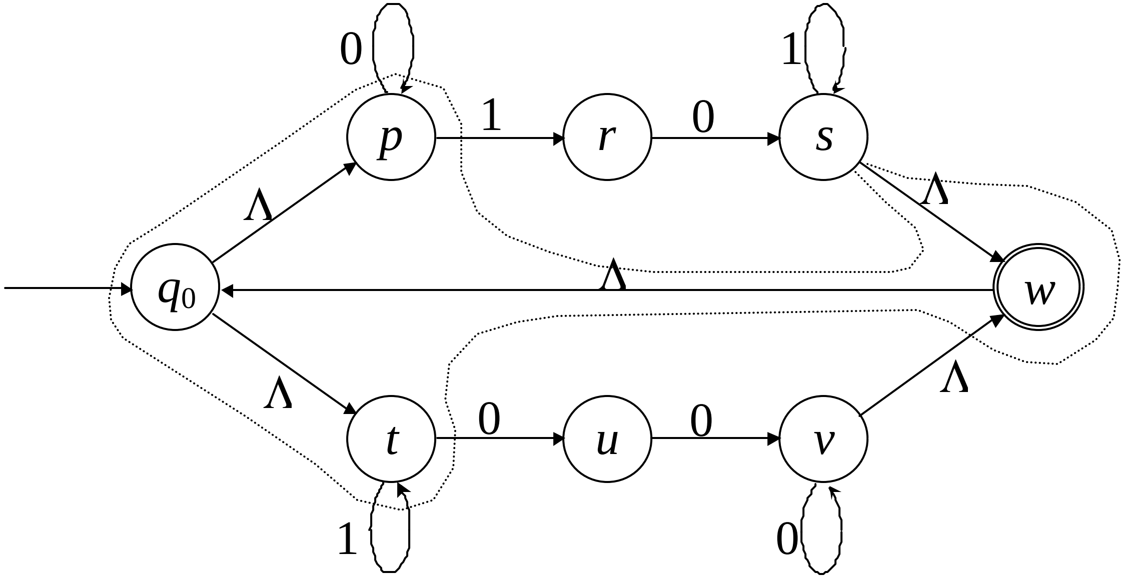

d*(q,ya)
d*(q,y)
a
Λ
Λ
Λ
q
a
a
Λ
Λ
Λ
a
Λ
y
ya

NFA-L *M* Sebagai Mesin Pengenal Bahasa

Untuk suatu NFA-Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, d)$

- String x diterima oleh M bila $d^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$
- Bahasa yang dikenali oleh M adalah $L(M)$ yaitu semua string yang diterima oleh M.

Contoh: suatu NFA-Λ ditunjukkan pada gambar berikut ini.



Mencari $\Lambda(\{s\})$:
Mula-mula $T = \{s\}$,
setelah iterasi pertama, $T = \{s, w\}$,
setelah iterasi kedua menjadi$\{s, w, q_0\}$,
setelah iterasi ketiga menjadi $\{s, w, q_0, p, t\}$,
setelah iterasi keempat berhenti karena T tidak berubah lagi.

Mencari $d^*(q_0, 010)$:
Untuk mencari $d^*(q_0, 010)$ perlu diketahui $d^*(q_0, 01)$, lalu untuk mencari $d^*(q_0, 01)$ perlu diketahui $d^*(q_0, 0)$, dan untuk mencari $d^*(q_0, 0)$ perlu diketahui $d^*(q_0, \Lambda)$, sbb.

$d^*(q_0, \Lambda) = \Lambda(\{q_0\}) = \{q_0, p, t\}$

$d^*(q_0, 0) = \Lambda(d(q_0,0) \cup d(p,0) \cup d(t,0))$

$\qquad = \Lambda(\varnothing \cup \{p\} \cup \{u\}) = \Lambda(\{p, u\}) = \{p, u\}$

$d^*(q_0, 01) = \Lambda(d(p,1) \cup d(u,1)) = \Lambda(\{r\}) = \{r\}$

$d^*(q_0, 010) = \Lambda(d(r,0)) = \Lambda(\{s\}) = \{s, w, q_0, p, t\}$

Apakah 010 diterima?
Karena $d^*(q_0, 010)$ berisi $w \in A$ maka 010 diterima.

Dalam hal ini transisi yang terjadi akibat string Λ010Λ adalah

$$q_0 \xrightarrow{\Lambda} p \xrightarrow{0} p \xrightarrow{1} r \xrightarrow{0} s \xrightarrow{\Lambda} w$$

Kompatibilitas NFA-L dengan NFA

Sebelumnya telah ditunjukkan bahwa NFA tidak lebih powerful dari FA dalam kemampuannya mengenali bahasa.

Dari setiap NFA dapat ditemukan suatu FA.

Bagaimana dengan NFA-Λ terhadap NFA atau FA? Apakah juga tidak lebih powerful?

Teorema: Bila $L \subseteq \Sigma^*$ suatu bahasa yang diterima NFA-Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, maka akan terdapat suatu NFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ yang juga menerima L.

Transisi-Λ adalah jenis lain dr nondeterminisme. Misalnya dalam M terdapat transisi

$$p \xrightarrow{0} q \xrightarrow{\Lambda} r$$

Simbol 0 dapat membawa M dari p ke q atau r.

Maka suatu NFA M_1 dapat dibuat dari M dengan menghapus transisi-Λ dan menggantikannya dengan transisi dari p ke r dengan masukan simbol 0.

Dalam konversi ini himpunan status Q tidak berubah, demikian pula status inisialnya. Secara lebih formal dijabarkan dalam:

- Menentukan $\boldsymbol{d}_1$ dari $\boldsymbol{d}$
- Menentukan A_1 dari A

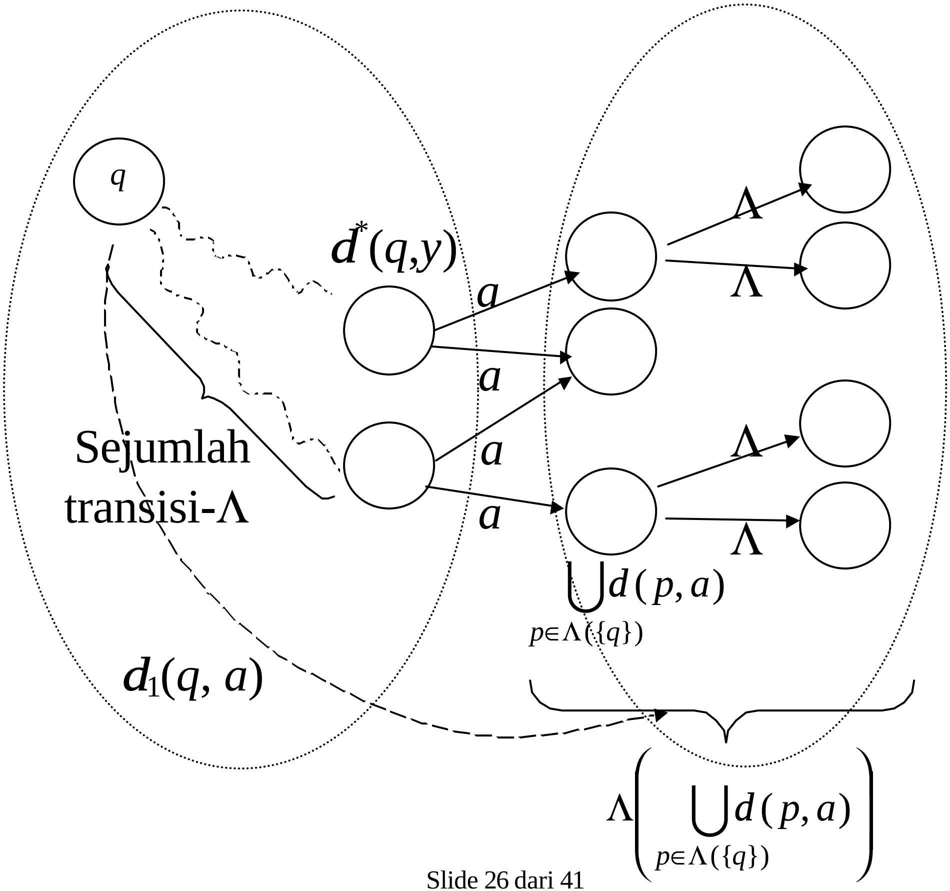
Menentukan d_1

Perubahan yang terjadi pada fungsi transisi d menjadi d_1 adalah karena adanya <u>tambahan transisi-transisi yang menggantikan transisi-Λ</u> tsb.

Untuk setiap $q \in Q$ dan $a \in \Sigma$,

$d_1(q, a) = d^*(q, a)$

$$= d^*(q, \Lambda a) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in d^*(q,\Lambda)} d(p, a) \right) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \Lambda(\{q\})} d(p, a) \right)$$


q
$d^*(q,y)$
a
a
a
a
Λ
Λ
Λ
Λ
Sejumlah transisi-Λ
$d_1(q, a)$
$\bigcup_{p\in\Lambda(\{q\})} d(p,a)$
$\Lambda\left(\bigcup_{p\in\Lambda(\{q\})} d(p,a)\right)$

Pendefinisian $\boldsymbol{d}_1$ seperti itu dimaksudkan agar $\boldsymbol{d}_1^*(q, a)$ dari NFA M_1 adalah semua status yang dapat tercapai oleh NFA-Λ M dari status q berdasarkan masukan string tak-kosong x (termasuk setiap kemungkinan transisi-Λ). Dpl., untuk membuktikan bahwa

$$\boldsymbol{d}_1^*(q, x) = \boldsymbol{d}^*(q, x)$$

Secara induksi struktural matematis akan dibuktikan sbb. Untuk $x = a \in \Sigma$,maka $\boldsymbol{d}_1^*(q, a) =$

$\boldsymbol{d}_1(q, a) = \boldsymbol{d}^*(q, a) = \boldsymbol{d}^*(q, x)$ Dengan hipotesis bahwa $\boldsymbol{d}_1^*(q, x) = \boldsymbol{d}^*(q, x)$, untuk $x = ya$, dengan $y \in \Sigma^*$, $|y| \geq 1$ dan $a \in \Sigma$, maka

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_1^*(q, ya) &= \bigcup_{p \in d_1^*(q,y)} \boldsymbol{d}_1(p, ya) \\ &= \bigcup_{p \in d^*(q,y)} \boldsymbol{d}_1(p, a) \\ &= \bigcup_{p \in d^*(q,y)} \boldsymbol{d}^*(p, a) \end{aligned}$$

Karena setiap $\boldsymbol{d}^*(p, a)$ adalah Λ-closure maka setelah digabungkan juga Λ-closure. Jadi Λ-closure dari himpunan yang dihasilkan ruas terakhir tersebut sama dengan himpunan itu sendiri, sbb.

$$\bigcup_{p \in d^*(q,y)} \boldsymbol{d}^*(p, a) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in d^*(q,y)} \boldsymbol{d}^*(p, a) \right) = \boldsymbol{d}^*(q, ya)$$

Menentukan A_1 dari A

A_1 bisa berbeda dari A. Suatu status inisial q_0 yang bukan status menerima akan menjadi status menerima apabila di dalam $\Lambda(\{q_0\})$ terdapat status menerima. Dituliskan secara formal sbb.

$$A_1 = \begin{cases} A \cup \{q_0\} & \text{jika } \Lambda(\{q_0\}) \cap A \neq \emptyset \text{ dalam } M \\ A & \text{lainnya} \end{cases}$$

Teorema: Untuk suatu alfabet Σ, setiapa bahasa $L \subset \Sigma^*$, ketiga pernyataan berikut ini adalah ekivalen (jika salah satu benar maka kedua lainnya juga benar):

1. L dapat dikenali oleh suatu FA.
2. L dapat dikenali oleh suatu NFA.
3. L dapat dikenali oleh suatu NFA-Λ.

Bukti: Teorema-teorema sebelumnya menyatakan bahwa pernyataan ketiga berimplikasi pernyataan kedua dan pernyataan kedua berimplikasi pernyataan pertama. Jadi untuk membuktikan teorema di atas cukup dengan membuktikan bahwa pernyataan pertama berimplikasi pernyataan ketiga.

Jika suatu bahasa L diterima oleh FA $M = \{Q, \Sigma, q_0, A, d)$. Suatu NFA-Λ $M_1 = \{Q, \Sigma, q_0, A, d_1)$

dapat dibentuk untuk menerima L sebagai berikut.

$\boldsymbol{d}_1$: Q × (Σ ∪ {Λ}) → 2^Q

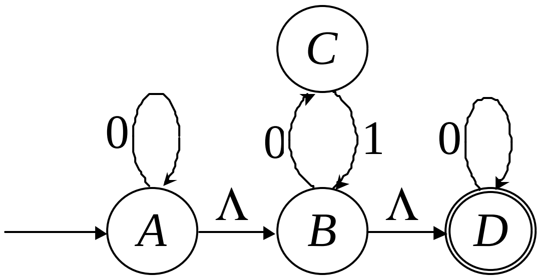
didefinisikan dengan formula (untuk setiap $q \in Q$, dan setiap $a \in \Sigma$).

$$\boldsymbol{d}_1(q, \Lambda) = \varnothing$$
$$\boldsymbol{d}_1(q, a) = \{\boldsymbol{d}(q,a)\}$$

Formula pertama menyatakan dalam M_1 tidak ada transisi-Λ, dan yang kedua menyatakan fungsi transisi d_1 dan d adalah identik kecuali jika d memetakan ke suatu status, d_1 memetakan ke himpunan yang hanya berisi status tersebut. Jadi, dalam hal ini, NFA-Λ M_1 tidak ada nondeterminisme.

Berikut ini beberapa contoh mengeliminasi transisi-Λ dari NFA-Λ menjadi NFA, dan mengkonversinya menjadi FA.

Contoh: berikut ini, *M* adalah NFA-Λ yang menerima bahasa $\{0\}^*\{01\}^*\{0\}^*$.



Fungsi transisi digambarkan dalam tabel transisi serta harga-harga $\boldsymbol{d}^*(q, 0)$ dan $\boldsymbol{d}^*(q, 1)$ misalnya.

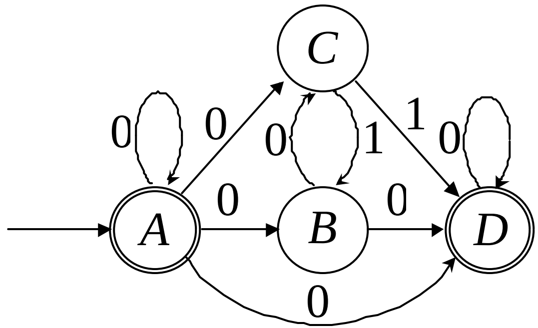
$$\boldsymbol{d}^*(A,0) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \Lambda(\{A\})} \boldsymbol{d}(p,0) \right)$$

Dengan fungsi transisi d_1 $(p, a) = d^*(p, a)$ untuk semua status p dan simbol a diperoleh tabel sbb.

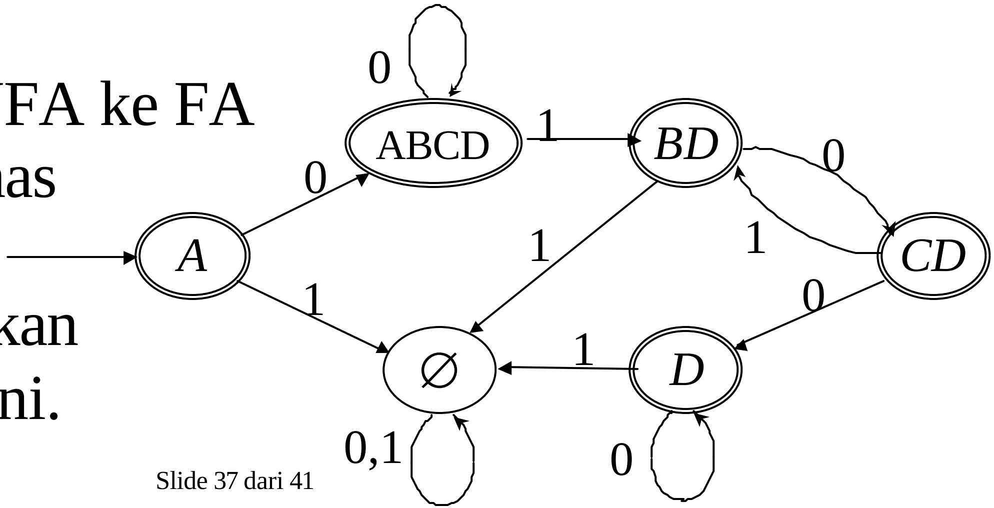
q	$d(q, L)$	$d(q, 0)$	$d(q, 1)$	$d^*(q, 0)$	$d^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$	$\varnothing$
B	$\{D\}$	$\{C\}$	$\varnothing$	$\{C,D\}$	$\varnothing$
C	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{B\}$	$\varnothing$	$\{B,D\}$
D	$\varnothing$	$\{D\}$	$\varnothing$	$\{D\}$	$\varnothing$

Status A menjadi status menerima karena dalam M status D dapat dicapai dari A dengan duakali transisi-Λ.

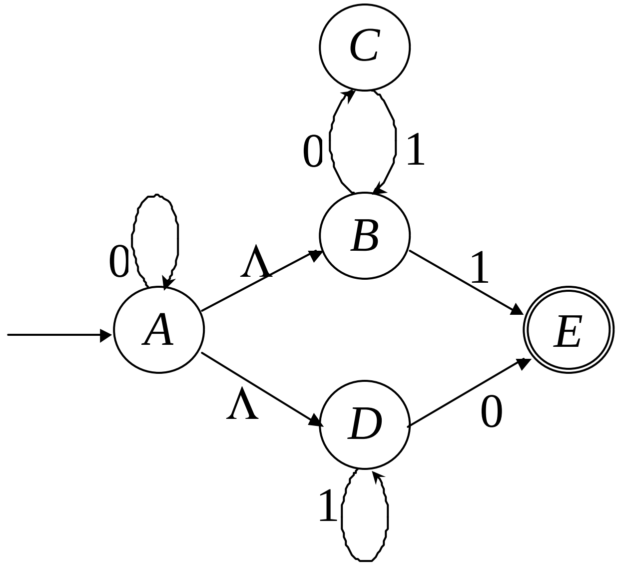
Dengan demikian NFA M_1 yang diperoleh adalah sebagai di samping ini.



Dan Konversi NFA ke FA yang telah dibahas pada topik NFA menghasilkan FA M_2 berikut ini.



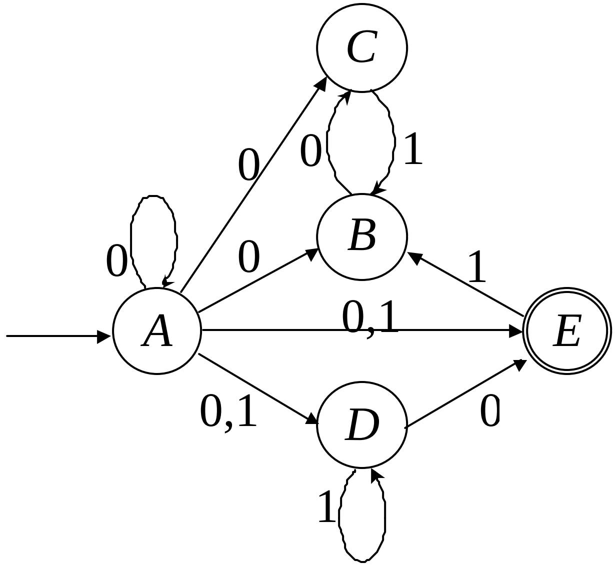
Contoh: NFA disamping ini ini mengenali bahasa $\{0\}^*(\{01\}^*\{1\} \cup \{1\}^*\{0\})$.



Tabel transisi berikut harga $d^*(q, 0)$ dan $d^*(q, 1)$ adalah.

q	$d(q, \mathbf{L})$	$d(q, 0)$	$d(q, 1)$	$d^*(q, 0)$	$d^*(q, 1)$
A	$\{B,D\}$	$\{A\}$	$\varnothing$	$\{A,B,C,D,E\}$	$\{D,E\}$
B	$\varnothing$	$\{C\}$	$\{E\}$	$\{C\}$	$\{E\}$
C	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{B\}$	$\varnothing$	$\{B\}$
D	$\varnothing$	$\{E\}$	$\{D\}$	$\{E\}$	$\{D\}$
E	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

NFA yang diperoleh adalah sebagai berikut.



Dari NFA di atas kemudian diperoleh FA sebagai berikut ini.